

Les fonctions

1

Les fonctions de référence de limite:

Les fonctions

Ensemble de définition

Limite

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots =$

kx	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$
kx^n	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow +\infty$
$k\sqrt{x}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$
kx	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$
kx^n	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow +\infty$
$k\sqrt{x}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$
$\frac{k}{x}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{x^n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{\sqrt{x}}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}$	$\rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \dots =$

kx	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow -\infty$
kx^n	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow -\infty$
kx	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow -\infty$
kx^n	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow -\infty$
$\frac{k}{x}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}$	$\rightarrow 0$
$\frac{k}{x^n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow 0$

à l'infini

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \dots =$

$\frac{k}{x}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$
$\frac{k}{x^n}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$	$\rightarrow +\infty$
$\frac{k}{\sqrt{x}}$	$\rightarrow k \in \mathbb{R}^+$	$\rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \dots =$

$$\frac{k}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} k \in \mathbb{R}^{*+} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{k}{x^n} \text{ (n pair)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} k \in \mathbb{R}^{*+}, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow +\infty$$

$$\frac{k}{x^n} \text{ (n impair)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} k \in \mathbb{R}^{*+}, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow -\infty$$

ED
En de fonctions:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \rightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists B \in \mathbb{R} : \forall x > B \Rightarrow f(x) \in]l-\epsilon; l+\epsilon[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+} : \forall x \in]\alpha; +\infty[\Rightarrow f(x) > A$$

de manière analogue pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Les formes indéterminées! a désigne un nb réel ou $\pm\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'une somme: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{forme indéterminée}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'un produit: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{array} \right\} \text{forme indéterminée}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'un quotient: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pm\infty \\ \pm\infty \end{array} \text{ forme indéterminée}$$

Formes indéterminées, Les Astuces :

"Astuce 1" : on factorise par le terme prépondérant

exemple : $f(x) = x^2 - 5x + 2 \rightarrow x^2(1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2})$

"Astuce 1 bis" : on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme prépondérant

exemple : $f(x) = \frac{-7x^2}{1-x} \rightarrow \frac{x^2(-7)}{x(\frac{1}{x}-1)}$

"Astuce 2" : On multiplie et on divise par l'expression dite "conjugée"

exemple : $f(x) = \sqrt{x+10} - \sqrt{x} \rightarrow \frac{(\sqrt{x+10} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{x+10} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+10} + \sqrt{x}}$

"Astuce 3" : Quand on a une fonction rationnelle, dont le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, on factorise le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$

exemple : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6} \rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$
 $\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{1}$

Le théorème des gendarmes :

Limite finie :

Il faut que $\nearrow$ à partir d'un rang, $v(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$$

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

Le théorème de comparaison!

Limite infinie positive:

Il faut que $\begin{cases} \text{à partir d'un rang } f(x) > g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Limite infinie négative:

Il faut que $\begin{cases} \text{à partir d'un rang } f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Le théorème des croissances comparées:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

La fonction exponentielle:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

d'après $e^x > x+1$ lemme

$$\frac{1}{e^a} = e^{-a}$$

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$e^a / e^b = e^{a-b}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

La fonction exponentielle est la plus forte $\rightarrow e^x > x^n$

Les asymptotes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \rightarrow$ La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \rightarrow$ La droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \rightarrow$ La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \rightarrow$ La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

La fonction composée :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) \quad \mathcal{D}(v \circ u) = \mathcal{D}v$$

exemple : $v \circ u$ avec $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R} \setminus \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{x-1} \\ v: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

Le changement de variable :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \Rightarrow \text{changement de variable,} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

On pose $x = -x$

La Tangente d'une fonction!

$$(T_a): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Coefficient directeur de la tangente:

$$f'(a) = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0}$$